جامعة البعث　　　　　　　　تحليل عقدي /1/　　　　　　　　اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات　　　الفصل الأول للعام الدراسي 2016-2017

السؤال الأول : (10+10+10+10+10=50درجة)

1"- إذا كان $z = x + iy$ و $|x| < \frac{\pi}{4}$ فاثبت أنّ $|\tan z| < 1$.

2"- اعتمادا" على الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة $\sin z = 3$.

3"- إذا كان $-\frac{15\pi}{4} < \phi < -\frac{7\pi}{4}$, $|z| > 0$　$\log z = Log|z| + i\phi$

فاوجد $\log(-1+i)^2$, $2\log(-1+i)$ ثمّ قارن بينهما .

4"- إذا كان $f(z) = x^3 + i(y+1)^3$ ففي أي النقاط تكون الدالة قابلة للاشتقاق وفي أي النقاط تكون تحليلية .

5"- إذا كان $u(x,y) = y^2 - x^2 + x + y$ فاثبت أن هذه الدالة توافقية ثمّ أوجد المرافق التوافقي لها ثمّ عبر عن الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ بدلالة Z .

السؤال الثاني : (10+10+30=50درجة)

1" – أوجد خيال القطعة المستقيمة $0 \le x \le 2$, $y = 1$ وفق التحويلة $w = z^2$.

2" - أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_3 = 0, z_2 = \infty, z_1 = -i$

فوق النقاط $w_3 = i, w_2 = -2i, w_1 = \infty$ على الترتيب .

3" – أحسب قيمة التكامليين الآتيين

$$I_1 = \int_{|z|=4} \frac{2z-3}{z^3 - 3z^2 + 4} dz \quad , \quad I_2 = \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2(z^3+8)} dz$$

مدرس المقرر:

د. رامز الشيخ فتوح

الإجابات النموذجية لمادة التحليل العقدي/1/

الفصل الأول للعام الدراسي 2016-2017

جواب السؤال الأول : (10+10+10+10+10=50درجة)

-"1 ١٥

1 $$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\Rightarrow |\tan z|=\frac{|\sin z|}{|\cos z|}=\frac{\sqrt{\sin^2 x+sh^2 y}}{\sqrt{\cos^2 x+sh^2 y}}$$

1+1+1 ولكن $$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\quad,\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\quad,\quad sh^2 y=\frac{01+ch2y}{2}$$

1 ومنه فإن $$|\tan z|=\sqrt{\frac{ch2y-\cos 2x}{ch2y+co2x}}$$ ولكن

1+1 $$|x|\prec\frac{\pi}{4}\ ,\Rightarrow -\frac{\pi}{4}\prec x\prec\frac{\pi}{4}\Rightarrow -\frac{\pi}{2}\prec 2x\prec\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\prec\cos 2x\prec 1$$

1+1 أي أن $$ch2y-\cos 2x\le ch2y\quad,\ ch2y+\cos 2x\ge ch2y$$

1 فعندئذ $$|\tan z|=\sqrt{\frac{ch2y-\cos 2x}{ch2y+\cos 2x}}\le\sqrt{\frac{ch2y}{ch2y}}\le 1$$ وهو المطلوب .

-"2 ١٥

1+1+2 $$\sin z=8\Rightarrow\ z=\arcsin 8=-i\ \log(i8+\sqrt{1-64})=-i\ \log(i8+\sqrt{-63})=$$

1+1+2 $$=-i\ \log(i8\pm i3\sqrt{7})=-i\ \log(i(8\pm 3\sqrt{7})=-i\left[Log(8\pm 3\sqrt{7})+i(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right]$$

2 $$=\frac{\pi}{2}+2n\pi-iLog(8\pm 3\sqrt{7})$$

-"3 ١٥

4 $$2\log(-1+i)=2Log\sqrt{2}-i\,\frac{13\pi}{2}$$

4 $$\log(-1+i)^2=\log-2i\ =Log\,2-\frac{5\pi}{2}i$$

2 ونلاحظ أن $$\log(-1+i)^2\ne 2\log(-1+i)$$

"4- لدينا $u(x,y)=x^3 \quad , \quad v(x,y)=(y-1)^3$

(١٥)

ومنه فإن $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=3(y-1)^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$ ١+١+١

أي أنّ المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة وشرط كوشي – زيمان الثاني محقق دوما" وشرط كوشي – ريمان الأول محقق عندما $3x^2=3(y-1)^2$ 2

أي محقق عند نقاط المستقيمين $y=x+1 \quad , \quad y=-x+1$ ١+١

أي أنّ الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق عند نقاط هذين المستقيمين وبما أنّ أي جوار لأية نقطة من نقاط هذين المستقيمين يحتوي على نقاط تكون الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق عند بعضها و غير قابلة للاشتقاق عند بعضها الآخر فالدالة غير تحليلية عند لأية نقطة من نقاط المستوي العقدي . 3

"5 - بما أنّ $u(x,y)=y^2-x^2+x+y$

(١٥)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2x+1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$$ 2

ومنه فإن $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^3}=-2+2=0$ 1

والدالة المعطاة توافقية المرافق التوافقي لها نجد اعتمادا" على شرط كوشي ريمان الأول أن $\frac{\partial v}{\partial y}=-2x+1 \Rightarrow v((x,y)=-2xy+y+\phi(x)$ ١+١

ومنه فإن $\frac{\partial v}{\partial x}=-2y+\phi'(x) \Rightarrow -2y+\phi'(x)=-2y-1 \Rightarrow \phi'(x)=-1$ ١+١+١

أي أن $\phi(x)=-x+c \Rightarrow v(x,y)=-2xy+y-x+c$ ١

ومنه فإن $f(z)=-z^2+z-iz+ic = -z^2+(1-i)z+ic$ ١

جواب السؤال الثاني : (10+10+15+15=50درجة)

1"- بفرض أن $w=u+iv$ $z=x+iy$ عندئذ

$v=2xy$, $u=x^2-y^2$ من أجل $y=1$ فإن $u=x^2-1\,,\,v=2x$

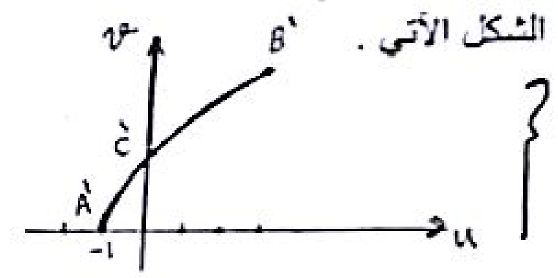
بحذف x من هاتين المعادلتين نجد أن $v^2=4(u+1)$ وهي معادلة قطع مكافئ

ذروته النقطة $(-1,0)$ محوره هو المحور الأفقي u وتقعره نحو u^+ خيال النقطة

$A(0,1)$ فهي النقطة $A'(1,0)$ وخيال النقطة $B(2,1)$ فهي النقطة $B'(3,4)$
وهذه النقطة تقع على القطع السابق أما خيال النقطة $C(1,1)$ من القطعة المستقيمة
فهي $C'(0,2)$ وهي أيضاً" تقع على القطع السابق ويكون خيال القطعة المستقيمة هو

جزء من الالقطع المصور بين النقطتين A' و B' والمار من النقطة C' كما في
الشكل الآتي .

غير مطلوبة



2"- التحويلة المطلوبة من الشكل $\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

نعوض z_2 $\frac{1}{z_2}$ w_1 $\frac{1}{w_1}$ فنجد بعد توحيد المقامات والأختصار أن

$$\frac{w_1w-1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_1w_2-1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{1-z_2z_3}{1-z_2z_1}$$

ومنه فإن $\frac{0-1}{w-i}\cdot\frac{-2i-i}{0-1}=\frac{z+i}{z-0}\cdot\frac{1-0}{1-0}$ اي أن $w=-\frac{2iz+1}{z+i}$.

15 { 3"- لحساب قيمة I_1 النقاط الشاذة هي $z_2 = z_3 = 2$ $z_1 = -1$ وهذه النقاط تقع في داخلية الكفاف المغلق المعطى ودرجة البسط أكبر من درجة المقام ب 2 لذلك فإن قيمة التكامل تساوي الصفر أي أن $I_1 = 0$

هنا إذا لم يذكر النظرية عند حساب I_1 توزع العلامات بالتساوي

1 لحساب I_2 النقاط الشاذة هي $z_1 = 0$ $z_2 = 1$ $z^3 + 8 = 0$ جذور المعادلة (15)

1 $z^3 + 8 = 0$ تقع على محيط الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها

$R = 2$ لذلك فإن هذه الجذور تقع في خارجية الكفاف المعطى أما النقطتان

2 $z_1 = 0$ $z_2 = 1$ فتقعان في داخلية الكفاف لذلك نحيط z_1 بدائرة c_1 نصف

2 قطرها صغير بقدر كاف كما نحيط z_2 بدائرة c_2 نصف قطرها صغير بقدر كاف ليكون $c_1 \cap c_2 = \phi$ ومنه واعتمادا" على مبرهنة كوشي جورسات للمناطق المتعددة

2 الترابط يكون
$$I_2 = \int_{c_1} \frac{e^z/(z-1)(z^3+8)}{z}dz + \int_{c_2} \frac{e^z/z(z^3+8)}{(z-1)^2}dz$$

1+1
$$I_2 = 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-1)(z^3+8)}\right]_{z=0} + \frac{2\pi i}{1}\left[\frac{e^z}{z(z^3+8)}\right]'_{z=1}$$

1+2
$$I_2 = \frac{2\pi i}{8} + 2\pi i\left[\frac{2e^{2z}z(z^3+8) - (z^3+8)e^{2z} - 3z^3e^{2z}}{z^2(z^3+8)^2}\right]_{z=1}$$

2
$$I_2 = \frac{2\pi i}{8} + \frac{12\pi i}{81} = \pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{27}\right) = \pi i\left(\frac{43}{108}\right)$$

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح 